

$(v_2, \alpha) = 0$ , e quindi  $r_\alpha(v_2) = v_2$ . Pertanto  $v_2 = r_\alpha(v_2) = r_\alpha(w(v_1)) = w'(v_1)$ , e per induzione su  $l(w)$  si conclude che  $v_1 = v_2$ .

**Osservazione :**

Dal fatto che  $W$  opera regolarmente sulle camere di Weyl, si deduce altresì che, se  $w \in W$  fissa un qualsiasi vettore  $v \in E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ , allora  $w = 1$ .

Infatti,  $v$  apparterrà a una camera  $C$ , associata a un sistema fondamentale  $\Pi$ . Allora, per ogni  $\alpha \in \Pi$ , è  $0 < (v, \alpha) = (w(v), w(\alpha)) = (v, w(\alpha))$ , da cui  $v \in w(C)$ . Segue  $C = w(C)$ , donde  $w = 1$ .

(E ancora, di qui segue che le sole riflessioni appartenenti a  $W$  sono le riflessioni  $r_\alpha$  ( $\alpha \in \Phi$ ). Infatti una riflessione  $r$  di asse  $H$ , diverso da  $H_\alpha$  per ogni  $\alpha \in \Phi$ , fissa tutti i vettori in  $H - \bigcup_{\alpha \in \Phi} H_\alpha$ .)

## 7. Sistemi di radici irriducibili

**Definizione 1.** Un sottoinsieme  $\Phi$  di vettori non-nulli di uno spazio euclideo  $E$  si dice **riducibile** se è unione (necessariamente disgiunta, essendo  $(,)$  definita positiva) di due sottoinsiemi propri  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  mutuamente ortogonali, i.e. tali che  $(\alpha, \beta) = 0$  per ogni  $\alpha \in \Phi_1, \beta \in \Phi_2$ .  $\Phi$  si dice **irriducibile** in caso contrario.

**Proposizione 1.** Sia  $\Phi$  un sistema di radici in uno spazio euclideo  $E$ , e sia  $\Pi$  un sistema fondamentale contenuto in  $\Phi$ . Allora  $\Phi$  è irriducibile se e solo se lo è  $\Pi$ .

**Dim.** Supponiamo che  $\Phi$  sia riducibile e che  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2, (\Phi_1, \Phi_2) = 0$ , sia una partizione ortogonale non-banale di  $\Phi$ . Se  $\Pi$  non è contenuto né in  $\Phi_1$  né in  $\Phi_2$ , otteniamo un'analogia partizione di  $\Pi$ . D'altra parte, se ad es.  $\Pi$  è contenuto in  $\Phi_1$ , si ha  $(\Pi, \Phi_2) = 0$ , e quindi  $(E, \Phi_2) = 0$ , ciò che è impossibile poichè  $(,)$  è non-degenere.

Supponiamo ora che  $\Phi$  sia irriducibile, e che  $\Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2, (\Pi_1, \Pi_2) = 0$ , sia una partizione ortogonale di  $\Pi$ . Poichè (cfr. 4., Teorema 4) ogni radice è immagine di una radice fondamentale mediante l'azione di  $W$ , si ha  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$ , ove  $\Phi_i$  denota l'insieme di tutte le radici in  $\Phi$  che sono immagini di radici in  $\Pi_i$  ( $i = 1, 2$ ). Sia  $\gamma = w(\alpha) \in \Phi_1$ , con  $\alpha \in \Pi_1$  e  $w = r_1 \cdots r_k$ , ove  $r_j = r_{\alpha_j}, \alpha_j \in \Pi$ . Poichè  $r_m r_j = r_j r_m$  se  $(\alpha_j, \alpha_m) = 0$ , si riconosce facilmente che  $\gamma$  si ottiene da  $\alpha$  aggiungendo o sottraendo radici appartenenti a  $\Pi_1$ . Ne segue che  $\Phi_1$  è contenuto nel sottospazio generato da  $\Pi_1$ , ciò che implica

$(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ . Dal momento che  $\Phi$  è irriducibile, deve essere  $\Phi_1 = \emptyset$ , e quindi  $\Pi_1 = \emptyset$ , oppure  $\Phi_2 = \emptyset$ , e quindi  $\Pi_2 = \emptyset$ .

**Proposizione 2.** *Se  $\Phi$  è un sistema di radici irriducibile, il gruppo di Weyl  $W$  è un sottogruppo irriducibile di  $GL(E)$  (i.e.  $E$  non ammette alcun sottospazio  $W$ -invariante non-banale). In particolare: la  $W$ -orbita di una qualsiasi radice genera lo spazio  $E$ .*

*Dim.* Supponiamo che  $W$  sia riducibile, e sia  $U$  un sottospazio  $W$ -invariante non-banale di  $E$ . Essendo  $(,)$  definita positiva, è  $U \cap U^\perp = \underline{0}$ , e quindi (cfr. III. 3. Prop. 1)  $E = U \oplus U^\perp$ .

Sia ora  $\alpha \in \Phi$ . Poichè, per ogni  $u \in U$ ,  $(r_\alpha - 1)u = -\langle u, \alpha \rangle \alpha \in U$ , segue che o  $\alpha \in U$ , oppure  $(u, \alpha) = 0$ , ovvero  $\alpha \in U^\perp$ . Si ottiene dunque una partizione di  $\Phi$  in due sottoinsiemi mutuamente ortogonali, uno dei quali per l'ipotesi deve essere necessariamente vuoto. Poichè  $\Phi$  genera  $E$ , ciò implica che o  $U = E$ , oppure  $U^\perp = E$ , ovvero  $U = \underline{0}$ , contraddizione.

Dunque  $W$  è irriducibile, e in particolare, poichè il sottospazio  $S$  generato dalla  $W$ -orbita di una radice  $\alpha$  è ovviamente invariante,  $S = E$ .

**Proposizione 3.** *Sia  $\Phi$  un sistema di radici irriducibile. Le lunghezze delle radici sono allora al più due, e le radici aventi la stessa lunghezza formano un'orbita per l'azione di  $W$ .*

*Dim.* Siano  $\alpha$  e  $\beta$  radici arbitrarie del sistema  $\Phi$ . Poichè la  $W$ -orbita che contiene  $\alpha$  genera  $E$ , in forza della Proposizione 2, esiste  $w \in W$  tale che  $(w(\alpha), \beta) \neq 0$ . Pertanto, per ogni possibile lunghezza, possiamo supporre che vi sia in  $\Phi$  una radice  $\alpha$  di quella lunghezza, con  $\alpha$  non ortogonale a  $\beta$ . Ma, se  $(\alpha, \beta) \neq 0$ , il rapporto fra i quadrati delle lunghezze di  $\alpha$  e  $\beta$  può assumere solo i valori 1, 2, 1/2, 3, 1/3 (cfr. 3.). Se vi fossero in  $\Phi$  radici di tre diverse lunghezze, anche il rapporto 3/2 dovrebbe essere ammesso, contraddizione.

Siano ora  $\alpha$  e  $\beta$  radici della stessa lunghezza. Possiamo come sopra supporre (eventualmente rimpiazzando  $\alpha$  con una opportuna  $w(\alpha)$ ) che  $\alpha$  e  $\beta$  non siano ortogonali. Possiamo inoltre supporre  $\alpha \neq \pm \beta$ , poichè in tal caso  $\beta$  sta nell'orbita di  $\alpha$  (essendo  $-\alpha = r_\alpha(\alpha)$ ). Segue allora, dalla Tabella in 3., che  $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle = \pm 1$ . Rimpiazzando  $\beta$ , se è il caso, con  $-\beta = r_\beta(\beta)$ , possiamo supporre  $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$ . Si ha allora:  $r_\alpha r_\beta r_\alpha(\beta) = r_\alpha r_\beta(\beta - \alpha) = r_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$ , e dunque  $\beta$  sta nella  $W$ -orbita che contiene  $\alpha$ . E' chiaro infine che ogni elemento di tale orbita è una radice della stessa lunghezza di  $\alpha$ .

**Definizione 2.** *Se  $\Phi$  è un sistema di radici irriducibile nel quale vi sono radici di lunghezza diversa, chiameremo **radici lunghe** (long roots) le radici aventi lunghezza maggiore, **radici corte** (short roots) le altre. (Nel caso in cui le radici di  $\Phi$  abbiano tutte la stessa lunghezza, si conviene di chiamarle tutte "lunghe").*

## 8. Matrici di Cartan, grafi di Coxeter e diagrammi di Dynkin

Sia al solito  $\Phi$  un sistema di radici in uno spazio euclideo  $E$  di dimensione  $n$ , e sia  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  un sistema fondamentale contenuto in  $\Phi$ .

**Definizione 1.** Si consideri la base ordinata  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , e si ponga  $A_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 2(\alpha_i, \alpha_j) / (\alpha_j, \alpha_j)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Si dice che la matrice  $(A_{ij})$  è la **matrice di Cartan** e che gli interi  $A_{ij}$  sono gli **interi di Cartan del sistema di radici  $\Phi$** . (Con ciò restringendo il senso finora dato al termine 'intero di Cartan'.)

**Osservazioni :**

1) La matrice di Cartan di  $\Phi$  dipende ovviamente dall'ordinamento scelto per  $\Pi$ , ma è indipendente dalla scelta di  $\Pi$ , poichè ogni altro sistema fondamentale è della forma  $w(\Pi)$ , per qualche  $w \in W$ .

2) La matrice di Cartan è *non-singolare* (basta osservare che la matrice  $((\alpha_i, \alpha_j))$  è non-singolare, essendo la matrice di una forma non-degenere).

**Esempi :** Le matrici di Cartan dei sistemi di radici di rango 2 sono le seguenti :

$$A_1 \times A_1 : \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad A_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad G_2 : \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vogliamo ora provare che la matrice di Cartan determina  $\Phi$  (a meno d'isomorfismi). Ciò equivale a dire che  $\Phi$  è completamente caratterizzato dagli angoli fra le radici fondamentali e dai rapporti fra le loro lunghezze.

**Teorema 1.** Siano  $\Phi, \Phi'$  due sistemi di radici negli spazi  $E, E'$ , siano  $\Pi, \Pi'$  due corrispondenti sistemi fondamentali, e siano  $(A_{ij}), (A'_{ij})$  due corrispondenti matrici di Cartan tali che  $A_{ij} = A'_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Allora la bijezione  $\Pi \rightarrow \Pi'$  che manda  $\alpha_i$  in  $\alpha'_i$  si amplia in un unico modo a un isomorfismo  $f: E \rightarrow E'$  tale che sia  $f(\Phi) = \Phi'$ , e  $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle f(\beta), f(\alpha) \rangle$  per ogni coppia di radici  $\alpha, \beta \in \Phi$  (cioè appunto,  $\Phi$  e  $\Phi'$  sono isomorfi).

**Dim.** Ovviamente, vi è un (unico) isomorfismo  $f: E \rightarrow E'$  che manda  $\alpha_i$  in  $\alpha'_i$ . Se  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $r_{f(\alpha)}(f(\beta)) = f(\beta) - \langle f(\beta), f(\alpha) \rangle f(\alpha) = f(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle$

$f(\alpha) = f(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = f(r_\alpha(\beta))$ , per la nostra ipotesi. Ciò vuol dire che, per ogni  $\alpha \in \Pi$ ,  $r_{f(\alpha)} = f r_\alpha f^{-1}$ . Dunque, poichè i gruppi di Weyl  $W = W(\Phi)$ ,  $W' = W(\Phi')$  sono entrambi generati dalle riflessioni fondamentali, l'applicazione  $w \rightarrow f w f^{-1}$  è un isomorfismo da  $W$  a  $W'$  che manda  $r_\alpha$  in  $r_{f(\alpha)}$  per ogni  $\alpha \in \Pi$ . Ora, per ogni  $\beta \in \Phi$ ,  $\beta = w(\alpha)$  per qualche  $\alpha \in \Pi$  e qualche  $w \in W$ . Ne segue  $f(\beta) = f(w(\alpha)) = f w f^{-1}(f(\alpha)) \in \Phi'$ . Dunque  $f(\Phi) = \Phi'$ . E poichè, per ipotesi,  $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle f(\beta), f(\alpha) \rangle$  per ogni coppia di radici  $\alpha, \beta \in \Pi$ , se  $\alpha \in \Pi$  e  $\beta = \sum c_i \alpha_i \in \Phi$ , si ha  $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \sum c_i \alpha_i, \alpha \rangle = \sum c_i \langle \alpha_i, \alpha \rangle = \sum c_i \langle f(\alpha_i), f(\alpha) \rangle = \langle \sum c_i f(\alpha_i), f(\alpha) \rangle = \langle f(\beta), f(\alpha) \rangle$ . Se infine  $\alpha$  è una qualsiasi radice, con  $\alpha = w(\gamma)$ ,  $\gamma \in \Pi$ , si ha  $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta, w(\gamma) \rangle = \langle w^{-1}(\beta), \gamma \rangle = \langle f(w^{-1}(\beta)), f(\gamma) \rangle = \langle f w^{-1} f^{-1}(f(\beta)), f w^{-1} f^{-1}(f(\alpha)) \rangle = \langle f(\beta), f(\alpha) \rangle$  (si noti che  $f w^{-1} f^{-1}$ , appartenendo a  $W'$ , è un'isometria!).

### Osservazione :

Il Teorema precedente assicura che è possibile ricostruire un sistema di radici  $\Phi$  a partire dagli interi di Cartan.

Per formulare un algoritmo che serva allo scopo, si possono utilizzare le stringhe di radici :

Ricordiamo che se  $\alpha, \beta \in \Phi$ , con  $\beta \neq \pm \alpha$ , e  $r, q$  sono i massimi interi non-negativi per i quali  $\beta - r\alpha, \beta + q\alpha$  rispettivamente siano radici, allora per ogni  $i$  con  $-r \leq i \leq q$   $\beta + i\alpha$  è una radice, e  $\{\beta - r\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha\}$  è la  $\alpha$ -catena passante per  $\beta$ . Inoltre,  $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$ .

Partendo dalle radici di altezza 1, cioè le radici in  $\Pi$ , osserviamo che per ogni  $\alpha_i, \alpha_j \in \Pi$ , con  $\alpha_i \neq \alpha_j$ , nella  $\alpha_j$ -catena passante per  $\alpha_i$  è  $r = 0$ , poichè  $\alpha_i - \alpha_j$  non è una radice. Dunque  $q = -\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  è noto, e in particolare possiamo determinare tutte le radici  $\alpha$  di altezza 2, e i corrispondenti interi  $\langle \alpha, \alpha_j \rangle$ . Dopo di ciò, consideriamo, per ogni radice  $\alpha$  di altezza 2, la  $\alpha_j$ -catena passante per  $\alpha$ . Vi sono due possibilità:  $\alpha = \alpha_j + \alpha_r$ , nel qual caso  $\alpha - \alpha_j$  è una radice, ma  $\alpha - 2\alpha_j = \alpha_r - \alpha_j$  non lo è, sicché  $r = 1$ ;  $\alpha = \alpha_r + \alpha_s$ ,  $j \neq r, s$ , nel qual caso  $\alpha - \alpha_j = \alpha_r + \alpha_s - \alpha_j$  non è una radice, e  $r = 0$ . In ogni caso  $q$  è allora noto, poichè  $r - q = \langle \alpha, \alpha_j \rangle$ . In particolare, possiamo determinare tutte le radici di altezza 3. Ripetendo questo procedimento finiamo col trovare tutte le radici positive (e quindi  $\Phi$ ).

Ad ogni sistema di radici  $\Phi$  possiamo associare un grafo  $\Gamma$  nel modo seguente :

Prendiamo come nodi di  $\Gamma$  le radici di un sistema fondamentale  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  contenuto in  $\Phi$ , e congiungiamo due nodi  $\alpha_i, \alpha_j$  ( $i \neq j$ ) mediante  $A_{ij}$ .  $A_{ji} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ ,  $\langle \alpha_j, \alpha_i \rangle = 0, 1, 2, 3$  spigoli.

**Definizione 2.** Diremo che il grafo  $\Gamma$  è il **grafo di Coxeter del sistema di radici  $\Phi$** .

**Esempi :**

$A_1 \times A_1$  :  $\circ \quad \circ$  ;  $A_2$  :  $\circ \text{---} \circ$  ;  $B_2$  :  $\circ \text{====} \circ$  ;  $G_2$  :  $\circ \text{=====} \circ$

**Osservazione :** Se tutte le radici di  $\Phi$  hanno la stessa lunghezza , il grafo di Coxeter  $\Gamma$  determina gli interi di Cartan , poichè in questo caso per ogni  $i \neq j$   $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$  , e  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \leq 0$  . Se invece vi sono radici di differenti lunghezze , e due nodi di  $\Gamma$  sono congiunti da due o tre spigoli , come in  $B_2$  o in  $G_2$  , il grafo  $\Gamma$  non ci dice quale nodo corrisponda a una radice lunga e quale a una radice corta , e quindi non determina i corrispondenti interi di Cartan .

Quando in  $\Gamma$  si presentano spigoli doppi o tripli , possiamo disegnare su ogni spigolo multiplo una freccia che punta verso il nodo che rappresenta la radice più corta . Ad es. :

$B_2$  :  $\circ \text{====>} \circ$  ;  $G_2$  :  $\circ \text{=====}< \circ$

In tal modo si ottiene un grafo  $\Delta$  , che contiene l'informazione sufficiente a ritrovare tutti gli interi di Cartan .

**Definizione 3 :** Il grafo  $\Delta$  prende il nome di **diagramma di Dynkin del sistema di radici  $\Phi$** .

(Come già il grafo di Coxeter  $\Gamma$ , il diagramma di Dynkin  $\Delta$  non dipende dalla scelta del sistema fondamentale  $\Pi$  , ma solo dall'ordine assegnato alle radici fondamentali.)

In forza del Teorema 1 , se vogliamo classificare tutti i possibili sistemi di radici a meno d'isomorfismi , ci possiamo ridurre a determinare tutte le possibili matrici di Cartan , ovvero i diagrammi di Dynkin . Ma è facile riconoscere che , di fatto, ci possiamo limitare a classificare i diagrammi di Dynkin *connessi* .

Si ha infatti, prima di tutto, che :

**Lemma 1 :** Un sistema di radici  $\Phi$  è irriducibile se e solo se il suo diagramma di Dynkin  $\Delta$  è un grafo connesso .

**Dim.** L'asserto è ovvio , poichè componenti distinte di  $\Delta$  corrispondono a sottoinsiemi mutuamente ortogonali di  $\Pi$  , e per la Proposizione 1 di 7.  $\Phi$  è riducibile se e solo se lo è  $\Pi$  .

Dopo di ciò , la proposizione seguente assicura che ci possiamo limitare a classificare i sistemi di radici irriducibili , ovvero i diagrammi di Dynkin connessi :

**Proposizione 1 :** *Ogni sistema di radici  $\Phi$  si può decomporre (in un unico modo) nell'unione (disgiunta) di sistemi di radici irriducibili  $\Phi_i$  di sottospazi  $E_i$  di  $E$ , tali che  $E = \perp E_i$  (somma diretta ortogonale).*

*Dim.* Se  $\Phi$  è irriducibile non c'è nulla da dimostrare. Sia dunque  $\Phi$  riducibile, così che un qualsiasi sistema fondamentale  $\Pi$  in  $\Phi$  è riducibile. Sia allora  $\Delta = \bigcup \Delta_i$  la decomposizione del diagramma di Dynkin in componenti connesse, e sia  $\Pi = \bigcup \Pi_i$  la corrispondente decomposizione di  $\Pi$  in sottoinsiemi irriducibili mutuamente ortogonali. Chiaramente, se si denota con  $E_i$  il sottospazio di  $E$  generato da  $\Pi_i$ ,  $E = \perp E_i$ . Orbene, posto  $\Phi_i = \Phi \cap E_i$ , si riconosce subito che  $\Phi_i$  consiste delle radici che sono combinazioni lineari (interi) di  $\Pi_i$ , e quindi che  $\Phi_i$  è un sistema di radici del sottospazio  $E_i$ , che ha  $\Pi_i$  come sistema fondamentale e  $\Delta_i$  come diagramma di Dynkin, e come gruppo di Weyl il gruppo  $W(\Phi_i) = \langle r_{\alpha|E_i} \mid \alpha \in \Pi_i \rangle$ . D'altra parte, ciascun sottospazio  $E_i$  è  $W$ -invariante, poichè ogni riflessione  $r_\alpha$ , con  $\alpha \in \Pi - \Pi_i$ , opera come l'identità su  $E_i$ . Ciò implica che ogni radice  $\alpha \in \Phi$  giace in uno degli  $E_i$ , poichè è immagine mediante  $W$  di qualche radice in  $\Pi$ . Si conclude che  $\Phi = \bigcup \Phi_i$ , come si voleva. (Quanto all'unicità della decomposizione  $\Phi = \bigcup \Phi_i$ , segue subito dal fatto che ogni altra analoga decomposizione dà luogo alla stessa decomposizione  $\Delta = \bigcup \Delta_i$  del diagramma di Dynkin.)

Analogo risultato sussiste per i gruppi di Weyl. Per determinare la struttura dei gruppi di Weyl, basta conoscere quella dei gruppi di Weyl dei sistemi di radici irriducibili:

**Corollario 1.** *Sia  $\Phi = \bigcup \Phi_i$ , nel senso della Proposizione precedente. Allora il gruppo di Weyl  $W = W(\Phi)$  è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi di Weyl  $W(\Phi_i)$ .*

*Dim.* Sia  $\Pi = \bigcup \Pi_i$  la decomposizione di  $\Pi$  in sottoinsiemi irriducibili mutuamente ortogonali che dà luogo alla decomposizione  $\Phi = \bigcup \Phi_i$ . Per ogni  $i$ ,  $W(\Phi_i)$  è isomorfo al sottogruppo  $W_i$  di  $W$  generato dalle riflessioni  $r_\alpha$  con  $\alpha \in \Pi_i$ . D'altra parte, il sottogruppo  $W_i$  è centralizzato da ogni sottogruppo  $W_j$  con  $i \neq j$  (e dunque è in particolare un sottogruppo normale di  $W$ ) dal momento che, per ogni  $\beta \in \Pi - \Pi_i$ ,  $r_\alpha$  commuta con  $r_\beta$ . Essendo  $W$  generato dalle riflessioni fondamentali,  $W = \prod W_i$ , e dunque resta solo da provare che se: (\*)  $w = x_1 \cdots x_r = y_1 \cdots y_r$  ( $x_i, y_i \in W_i$ ), allora  $x_i = y_i$ . Ora, da (\*) segue  $y_i^{-1} x_i = (y_1 \cdots y_{i-1} y_{i+1} \cdots y_r)(x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_r)^{-1}$ . E poichè il secondo membro opera come l'identità su  $E_i$ , mentre il primo membro opera come l'identità su ogni  $E_j$ , con  $i \neq j$ , si conclude che  $y_i^{-1} x_i = 1$ , ovvero  $x_i = y_i$ .

## 9 . Classificazione dei sistemi di radici irriducibili

In questo paragrafo determiniamo tutte le possibili configurazioni di un diagramma di Dynkin connesso , o equivalentemente tutti i possibili sistemi di radici irriducibili (a meno d'isomorfismi) . Nel paragrafo seguente, vedremo che per ogni configurazione possibile, esiste effettivamente un sistema di radici con quel diagramma di Dynkin .

Le linee della dimostrazione seguono Jacobson , "Lie Algebras" pp. 128-135 . In essa si assume , per ragioni di semplicità , un punto di vista un po' più generale ; si classificano cioè i grafi delle cosiddette "configurazioni ammissibili" , prescindendo dalle lunghezze relative dei vettori , che si possono perciò supporre tutti di lunghezza 1 .

**Definizione 1.** Diremo insieme ammissibile (o configurazione ammissibile) in uno spazio euclideo  $E$ , ogni insieme  $S = \{u_1, \dots, u_s\}$  di  $s$  vettori unitari (= di lunghezza 1) linearmente indipendenti , soddisfacenti le condizioni : i) per ogni  $i \neq j$   $(u_i, u_j) \leq 0$ ; ii) per ogni  $i \neq j$   $4(u_i, u_j)^2 = 4\cos^2\theta_{ij} = 0, 1, 2, 3$  ( $\theta_{ij}$  essendo l'angolo fra  $u_i$  e  $u_j$ ).

Per ogni insieme ammissibile  $S$  , costruiamo ora un grafo  $\Gamma(S)$  nel modo seguente : i nodi di  $\Gamma(S)$  rappresentano i vettori di  $S$  ; per ogni  $i \neq j$  i nodi  $i$  ,  $j$  che rappresentano i vettori  $u_i$  ,  $u_j$  sono congiunti da  $4(u_i, u_j)^2$  spigoli .

Naturalmente, l'insieme  $S$  sarà irriducibile (nel senso di 7.) se e solo se il corrispondente grafo  $\Gamma(S)$  è connesso .

Cerchiamo dunque di classificare, in una successione di passi , i possibili grafi connessi  $\Gamma(S)$  :

a) Se eliminiamo da un insieme ammissibile  $S = \{u_1, \dots, u_s\}$  alcuni vettori , otteniamo un sottoinsieme  $S'$  che è ancora ammissibile , il cui grafo  $\Gamma(S')$  si ottiene da  $\Gamma(S)$  elidendo i nodi corrispondenti e gli spigoli ad essi incidenti .

b) Il numero delle coppie di nodi di  $\Gamma(S)$  che sono congiunti da almeno uno spigolo è strettamente minore di  $s$  .

Si ponga  $u = \sum_1^s u_i$  . Allora: (\*)  $0 < (u, u) = s + 2 \sum_{i < j} (u_i, u_j)$  . Se i nodi  $i, j$  sono adiacenti, i.e.  $(u_i, u_j) \neq 0$  , è  $4(u_i, u_j)^2 = 1, 2, 3$  e dunque  $2(u_i, u_j) \leq -1$ . Segue da (\*) che il numero di tali coppie  $(i, j)$  non supera  $s-1$  .

c) Nessun sottografo di  $\Gamma(S)$  è un ciclo . ( Ricordiamo che un ciclo è un grafo con nodi  $i_1, \dots, i_k$  tale che  $i_j$  è congiunto da uno spigolo a  $i_{j+1}$  ( $1 \leq j \leq k-1$ ),  $i_k$  è congiunto a  $i_1$  , e non vi sono altri spigoli . )

Per a) , un ciclo in  $\Gamma(S)$  sarebbe il grafo di un sottoinsieme ammissibile  $S'$ , che violerebbe b) .

d) Il numero degli spigoli (contati secondo la loro molteplicità) incidenti a un nodo in  $\Gamma(S)$  , è  $\leq 3$  .

Sia  $u \in S$  , e siano  $v_1, \dots, v_h$  i vettori di  $S$  congiunti a  $u$  da uno o più spigoli , i.e. tali che  $(u, v_i) < 0$  ,  $(1 \leq i \leq h)$ . Poichè in  $\Gamma(S)$  non vi sono cicli ,  $(v_i, v_j) = 0$  per ogni  $i \neq j$  , cioè  $v_i$  e  $v_j$  sono ortogonali . Consideriamo il sottospazio  $E'$  di  $E$  generato dai vettori  $u, v_1, \dots, v_h$  , e in esso scegliamo un vettore unitario  $v_0$  ortogonale a  $v_1, \dots, v_h$  . Ovviamente  $(u, v_0) \neq 0$ , altrimenti sarebbe  $(v, v_0) = 0$  per ogni  $v \in E'$ , e quindi anche  $(v_0, v_0) = 0$  . D'altra parte  $v_0, v_1, \dots, v_h$  formano una base ortogonale di  $E'$ , e quindi  $u = \sum_0^h (u, v_i) v_i$ . Si ha pertanto  $1 = (u, u) = \sum_0^h (u, v_i)^2$  , ciò che implica  $4 > \sum_1^h 4(u, v_i)^2$  . Ma, per definizione,  $4(u, v_i)^2$  è il numero degli spigoli che congiungono  $u$  a  $v_i$  , e si ha l'asserto .

e) L'unico grafo connesso di un insieme ammissibile che contenga uno spigolo triplo è :

$$G_2 : \quad \text{O} \equiv \text{O}$$

Segue immediatamente da d) .

f) Se il sottoinsieme  $\{u_1, \dots, u_k\}$  di  $S$  forma in  $\Gamma(S)$  una catena :

$$\text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{---} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O}$$

l'insieme  $S' = (S - \{u_1, \dots, u_k\}) \cup \{u\}$  , ove  $u = \sum_1^k u_i$  , è anch'esso un insieme di vettori ammissibile .

$S'$  è linearmente indipendente . Poichè  $2(u_i, u_{i+1}) = -1$  per  $i = 1, \dots, k-1$  , e  $(u_i, u_j) = 0$  se  $j \neq i+1$  , si ha :  $(u, u) = k + 2 \sum_{i < j} (u_i, u_j) = k - (k-1) = 1$  , cioè  $u$  è un vettore unitario . Osserviamo poi che ogni vettore in  $S - \{u_1, \dots, u_k\}$  è congiunto da uno spigolo ad al più uno dei vettori  $u_1, \dots, u_k$  , dal momento che in  $\Gamma(S)$  non vi sono cicli . Ciò implica che, per ogni  $v \in S - \{u_1, \dots, u_k\}$  , si ha  $(v, u) = 0$  oppure  $(v, u) = (v, u_i)$  per qualche  $i = 1, \dots, k$  , e dunque in ogni caso  $4(v, u)^2 = 0, 1, 2, 3$  . Si conclude che  $S'$  è ammissibile .

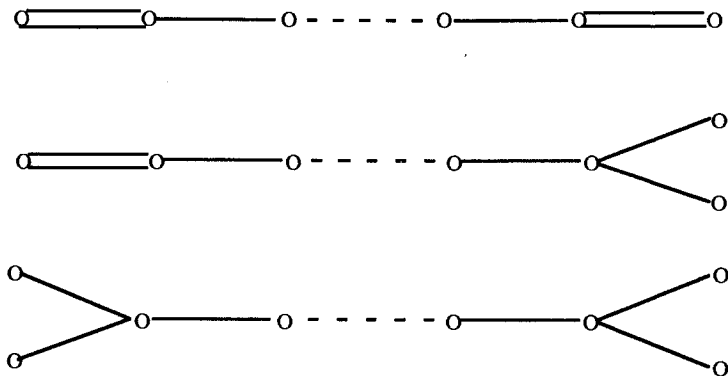
Osservazione : Rimpiazzare il grafo  $\Gamma(S)$  con il grafo  $\Gamma(S')$  equivale a contrarre a un nodo la catena semplice

$$\text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O} \text{---} \text{---} \text{---} \text{O} \text{---} \text{O}$$



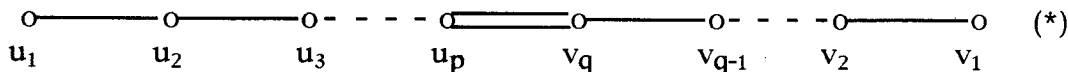
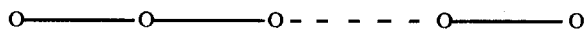
sostituendo i nodi  $u_1, \dots, u_k$  con l'unico nodo  $u$ , e congiungendo  $u$  ad ogni nodo  $v \in S - \{u_1, \dots, u_k\}$  con tanti spigoli quanti erano quelli che congiungevano  $v$  ai vettori  $u_1, \dots, u_k$ .

g)  $\Gamma(S)$  non contiene alcun sottografo della forma :

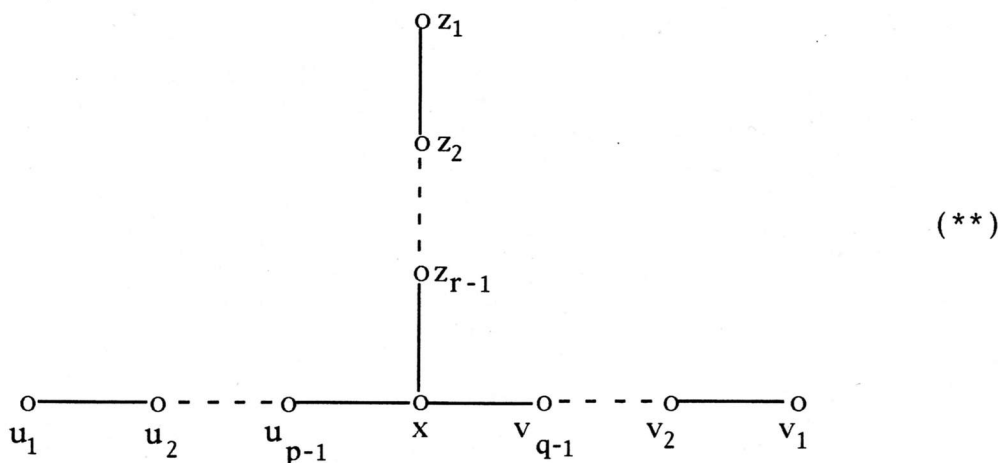


In caso contrario, questi sarebbero, in forza di a), grafi di insiemi ammissibili, e in ciascun caso, contraendo la catena semplice che vi compare a un singolo nodo, si otterrebbe in forza di f) il grafo di un insieme ammissibile che viola d).

h) Ogni grafo  $\Gamma(S)$  connesso ha una delle forme seguenti :



$$G_2 : \text{triple line between two nodes}$$



In forza di e), se  $\Gamma(S)$  contiene uno spigolo triplo, è del tipo  $G_2$ . D'altronde, se in  $\Gamma(S)$  vi fossero due spigoli doppi,  $\Gamma(S)$  conterrebbe un sottografo che ha la forma del primo grafo escluso in g). Dunque  $\Gamma(S)$  contiene al più uno spigolo doppio. Ma se uno spigolo doppio è presente, allora in  $\Gamma(S)$  non vi sono nodi di diramazione (altrimenti conterrebbe un sottografo che ha la forma del secondo grafo escluso in g)), e poichè  $\Gamma(S)$  non contiene cicli, si conclude che deve avere la forma (\*). Supponiamo dunque che  $\Gamma(S)$  non contenga spigoli doppi. Allora  $o$  è una catena semplice, oppure ha dei nodi di diramazione. In tal caso, vi è un unico nodo di diramazione (altrimenti conterrebbe un sottografo che ha la forma del terzo grafo escluso in g)), e si conclude che  $\Gamma(S)$  è un grafo della forma (\*\*).

i) *Gli unici grafi  $\Gamma(S)$  di tipo (\*) sono :*

$$F_4 : \quad \circ \text{---} \circ \text{=} \circ \text{---} \circ$$

$$B_s = C_s : \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{=} \circ$$

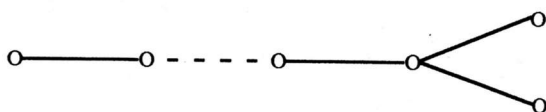
Poniamo  $u = \sum_1^p i u_i$ ,  $v = \sum_1^q i v_i$ . Poichè  $2(u_i, u_{i+1}) = -1 = 2(v_i, v_{i+1})$  e le

altre coppie sono ortogonali, si ha  $(u, u) = \sum_1^p i^2 - \sum_1^{p-1} i(i+1) = p(p+1)/2$ ,

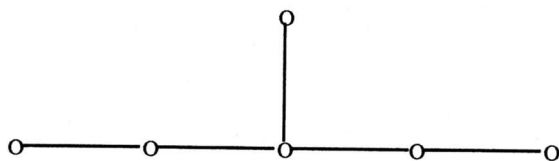
e similmente  $(v, v) = q(q+1)/2$ . Ed essendo  $4(u_p, v_q)^2 = 2$ , otteniamo altresì  $(u, v)^2 = p^2 q^2 (u_p, v_q)^2 = p^2 q^2 / 2$ . Poichè  $u$  e  $v$  sono linearmente indipendenti, per la disuguaglianza di Schwartz  $(u, v)^2 < (u, u) \cdot (v, v)$ , ovvero  $p^2 q^2 / 2 < p(p+1)q(q+1)/4$ , da cui  $(p-1)(q-1) < 2$ . Pertanto le sole possibilità per  $p, q > 0$  sono : 1)  $p = 1$  e  $q$  arbitrario, ovvero  $q = 1$  e  $p$  arbitrario, che danno la soluzione  $B_s = C_s$ ; 2)  $p = q = 2$ , che dà  $F_4$ .

1) Gli unici grafi  $\Gamma(S)$  di tipo (\*\*) sono :

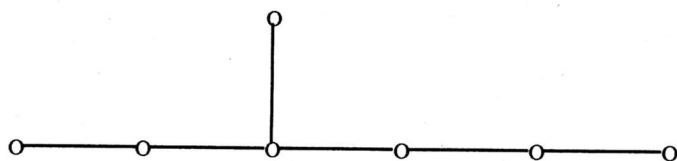
$D_5$



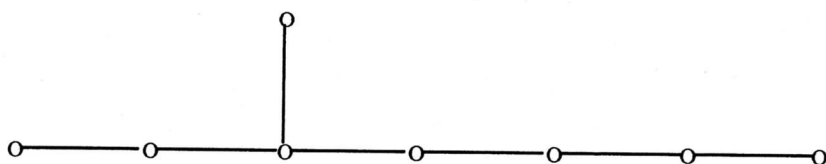
$E_6$



$E_7$



$E_8$



Poniamo  $u = \sum_1^{p-1} i u_i$ ,  $v = \sum_1^{q-1} i v_i$ ,  $z = \sum_1^{r-1} i z_i$ . Allora  $u$ ,  $v$  e  $z$  sono vettori indipendenti fra loro ortogonali, e ragionando come nella dimostrazione del punto d) otteniamo che deve essere  $1 > (x,u)^2/(u,u) + (x,v)^2/(v,v) + (x,z)^2/(z,z) = \cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_3$ , ove  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  e  $\theta_3$  sono gli angoli fra  $x$  e  $u$ ,  $v$ ,  $z$  rispettivamente. D'altra parte (cfr. i), con  $p-1$  al posto di  $p$ ) è  $(u,u) = p(p-1)/2$ , e similmente per  $v$  e  $z$ . Dunque  $\cos^2\theta_1 = (x,u)^2/(u,u) = (x, (p-1)u_{p-1})^2/(u,u) = (p-1)^2(1/4)(2/(p(p-1))) = (p-1)/2p = (1/2)(1 - 1/p)$ , e similmente per  $\theta_2$  e  $\theta_3$ . Ne segue  $1 > (1/2)(1 - 1/p + 1 - 1/q + 1 - 1/r)$ , ovvero : (-)  $1/p + 1/q + 1/r > 1$ . Senza ledere la generalità possiamo supporre che sia  $p \geq q \geq r$  ( $\geq 2$ , perchè se  $p$  o  $q$  o  $r$  fosse uguale a 1,  $\Gamma(S)$  sarebbe una catena semplice), ovvero  $1/p \leq 1/q \leq 1/r$  ( $\leq 1/2$ ). Dalla disuguaglianza (-) ricaviamo allora  $3/2 \geq 3/r > 1$ , e dunque  $r = 2$ . Segue  $1/p + 1/q > 1/2$ , da cui  $2/q > 1/2$ , e quindi  $2 \leq q < 4$ . Se  $q = 2$ ,  $p$  è arbitrario. Se  $q = 3$ , allora  $1/p > 1/6$ , i.e.  $p < 6$ . In conclusione, le soluzioni per  $p$ ,  $q$  e  $r$  sono le seguenti :

$p$  arbitrario,  $q = r = 2$  cui corrisponde il grafo  $D_5$ ;  
 $p = 3$ ,  $q = 3$ ,  $r = 2$  cui corrisponde il grafo  $E_6$ ;  
 $p = 4$ ,  $q = 3$ ,  $r = 2$  cui corrisponde il grafo  $E_7$ ;  
 $p = 5$ ,  $q = 3$ ,  $r = 2$  cui corrisponde il grafo  $E_8$ .

Riassumendo i risultati ottenuti , concludiamo che il grafo di un insieme ammissibile di vettori di uno spazio euclideo , che sia irriducibile , ha una delle forme seguenti :

Tabella 1

$$A_s \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ$$

$$B_s = C_s \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \text{=} \circ$$

$$D_s \quad \circ \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} \circ \text{---} \circ \begin{array}{l} \diagup \circ \\ \diagdown \circ \end{array}$$

$$G_2 \quad \circ \text{=} \text{=} \text{=} \circ$$

$$F_4 \quad \circ \text{---} \circ \text{=} \text{=} \circ \text{---} \circ$$

$$E_6 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

$$E_7 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

$$E_8 \quad \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \end{array}$$

Sia ora  $\Phi$  un sistema di radici irriducibile di uno spazio euclideo  $E$  , e sia  $\Pi$  un sistema fondamentale contenuto in  $\Phi$ . Allora  $\Pi$  è irriducibile, e dà luogo

a un diagramma di Dynkin connesso che determina  $\Phi$  a meno d'isomorfismi. Normalizzando (cioè dividendo per la sua lunghezza) ogni radice fondamentale, si ottiene un insieme ammissibile di vettori, il cui grafo  $\Gamma$  coincide con il grafo di Coxeter di  $\Phi$ .

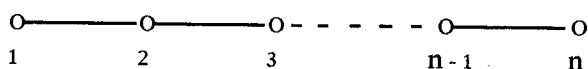
Abbiamo pertanto provato il seguente :

**Teorema 1** . I diagrammi di Dynkin dei possibili sistemi di radici irriducibili sono quelli che si ottengono dai grafi della Tabella 1 "reintroducendo" le lunghezze relative delle radici .

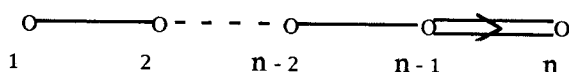
Ponendo, per un sistema di radici di rango  $n$  ( $n = \dim E = \text{Card } \Pi$ ),  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ , e etichettando i nodi del diagramma di Dynkin in accordo alla numerazione delle radici fondamentali, otteniamo la tabella seguente :

Tabella 2

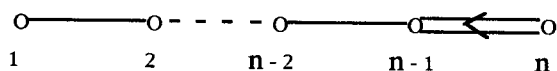
$A_n$  ( $n \geq 1$ )



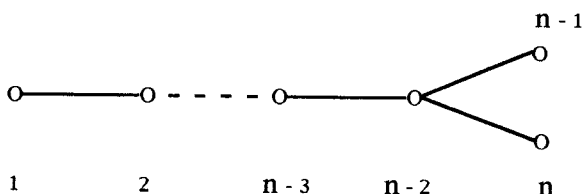
$B_n$  ( $n \geq 2$ )



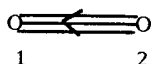
$C_n$  ( $n \geq 3$ )



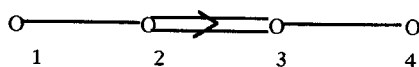
$D_n$  ( $n \geq 4$ )

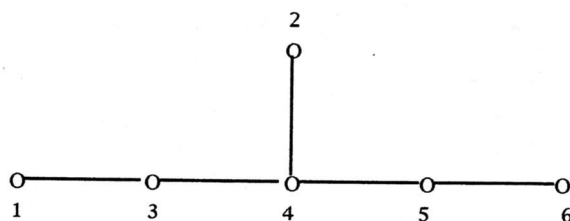
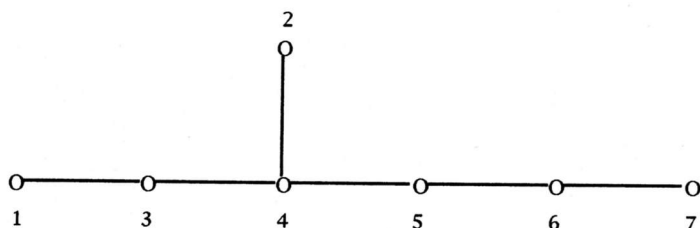
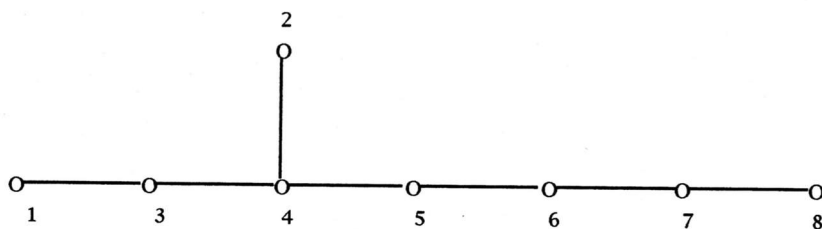


$G_2$



$F_4$



$E_6$  $E_7$  $E_8$ 

Le restrizioni sul rango nei casi  $A_n - D_n$  sono imposte al solo fine di evitare duplicazioni. Si noti in particolare che, a posteriori, possiamo concludere che il grafo di Coxeter determina univocamente il diagramma di Dynkin di un sistema di radici irriducibile, salvo nel caso di  $B_n$  e  $C_n$ , che hanno peraltro lo stesso grafo di Coxeter, e differiscono invece nel rapporto fra il numero di radici lunghe e radici corte.

Si vede inoltre che:

**Proposizione 1.** *Ogni sistema di radici irriducibile è autoduale, salvo il caso di  $B_n$  e  $C_n$  ( $n > 2$ ), che sono duali l'uno dell'altro.*

*Dim.* L'autodualità è ovvia per i sistemi in cui le radici hanno tutte la stessa lunghezza. Si osservi inoltre che, se  $\Pi$  è un sistema fondamentale in un sistema di radici  $\Phi$ ,  $\Pi^*$  è un sistema fondamentale nel duale  $\Phi^*$ , e (cfr. 2., Lemma 4, b)) nel passare da un sistema al suo duale si preservano gli angoli fra le radici e si rovesciano i rapporti fra le lunghezze (in altre parole, il diagramma di Dynkin di  $\Phi^*$  si ottiene da quello di  $\Phi$  invertendo il verso delle frecce). Segue subito allora che  $G_2$  e  $F_4$  sono autoduali, e che il duale di  $B_n$  è  $C_n$  (e in particolare,  $B_2 = C_2$  è autoduale).